سری اول تمرین‌های ریاضی ۲

۲۱ اسفند ۱۳۹۶

تمرین‌های برگزیده

تمرین ۱: فرض کنید E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ با پایه $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ باشد. نشان دهید

$$\{u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_3 - u_4, u_4\}$$

نیز پایه‌ای برای E است.

تمرین ۲: عدد حقیقی t را طوری پیدا کنید که $\{(3,1,4), (2,-3,5), (5,9,t)\}$ زیر مجموعه‌ای وابسته خطی از $\mathbb{R}^3$ باشد.

تمرین ۳: زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^5$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E =< (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,1), (0,1,1,1,1), (2,1,-1,0,1) >$$

یک پایه برای E پیدا کنید. E چند بعدی است.

تمرین ۴: پایه‌ای برای $\mathbb{R}^4$ پیدا کنید که شامل $(1,0,1,0)$ و $(0,1,0,1)$ باشد.

تمرین ۵: زیرفضاهای خطی E_1 و E_2 از $\mathbb{R}^5$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_1 =< (2,0,3,1,1), (1,0,2,1,1), (2,0,3,1,3) >$$

$$E_2 =< (2,1,1,0,1), (3,2,3,2,3), (1,1,1,1,1) >$$

پایه ای برای $E_1 + E_2$ و پایه‌ای برای $E_1 \cap E_2$ پیدا کنید. این دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^5$ چند بعدی هستند؟

تمرین ۶: فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^4$ باشد:

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$$

نشان دهید E یک زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^4$ است. پایه‌ای برای E پیدا کنید و آن را به پایه‌ای برای $\mathbb{R}^4$ گسترش دهید. E چند بعدی است؟

تمرین ۷: فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^9$ باشند. نشان دهید اگر $\dim E_1 = \dim E_2 = 5$ آنگاه $E_1 \cap E_2 \neq \{0\}$.

تمرین ۸: فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $E_1 \cup E_2$ زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، نشان دهید $E_1 \subseteq E_2$ یا $E_2 \subseteq E_1$

تمرین ۹: فرض کنید $E_1 = \{(x, y, x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ نشان دهید E_1 زیرفضای خطی $\mathbb{R}^4$ است. زیرفضای خطی E_2 از $\mathbb{R}^4$ را چنان پیدا کنید که $\mathbb{R}^4 = E_1 \bigoplus E_2$.

تمرین ۱۰: فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند. آیا از $\mathbb{R}^n = E_1 \bigoplus F = E_2 \bigoplus F$ می‌توان نتیجه گرفت $E_1 = E_2$؟ چرا؟

تمرین ۱۱: فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}^n$. نشان دهید $u.v = 0$ اگروفقط‌اگر برای هر $c \in \mathbb{R}$، $|u| \leq |u+cv|$.

تمرین ۱۲: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد به طوری که عدد طبیعی k و $x \in \mathbb{R}^n$ موجود است که $A^k x = 0$ و $A^{k-1}x \neq 0$. نشان دهید زیرمجموعه زیر از $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است:

$$\{x, Ax, A^2x, \cdots, A^{k-1}x\}$$

تمرین ۱۳: فرض کنید $u_1, \cdots, u_m \in \mathbb{R}^n$ طوری باشند که برای هر $i \neq j$، $u_i.u_j = 0$ و نیز برای هر i، $|u_i| = 1$. اگر $v \in \mathbb{R}^n$، نشان دهید $|v|^2 = (v.u_1)^2 + \cdots + (v.u_m)^2$ اگروفقط اگر $v \in < u_1, \cdots, u_m >$.

تمرین ۱۴: فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}^n$. اگر $|u| = |v| = 1$ و $u.v = 1$، نشان دهید $u = v$.

تمرین ۱۵: فرض کنید $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ دو به دو متعامد باشند و $x = au + bv + cw$، که $a, b, c \in \mathbb{R}$. نشان دهید $|x|^2 = a^2|u|^2 + b^2|v|^2 + c^2|w|^2$. ضریب a را بر حسب u و x به دست آورید. به طور مشابه فرمول‌هایی برای b و c نیز پیدا کنید.

تمرین‌های کتاب

تمرین ۱: دترمینان ماتریس‌های زیر را حساب کنید و در صورت غیرصفر بودن دترمینان، وارون ماتریس را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نمونه سوال‌های امتحانی

سوال ۱ (نیم‌سال دوم ۸۸–۸۷): در $\mathbb{R}^4$ خط l به معادله $x - 1 = -y = z = t + 1$ و صفحه P به معادله $x + y - t = y + z - t = 0$ را درنظر بگیرید. معادله خطی را بنویسید که خط l و صفحه P را قطع کند و بر آن‌ها عمود باشد.